# 17-1-19

~~$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(e^n)'}{n'} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{1} = +\infty$~~ όχι

Ορίζω τη συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$

Από κανόνα De L'Hospital $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ Από ακολουθιακό ορισμό του ορίου, $\forall \{a_n\}$, με $a_n \to \infty$, ισχύει $f(a_n) = +\infty$

$\Rightarrow f(n) \to +\infty$

$\phantom{\Rightarrow}$ "$\frac{e^n}{n}$"

__Μελέτη ~~Συνάρτησης~~ Συνάρτησης__

- Πεδίο Ορισμού - Σύνολο τιμών
- Συνέχεια - Παρ/σιμα
- Άρτια, περιττή ή περιοδική
- Διαστήματα μονοτονίας
- Τοπικά - ολικά ακρότατα
- Διαστήματα κυρτότητας
- Σημεία καμπής
- Ασύμπτωτες

__Παράδειγμα__

$f(x) = x + \frac{1}{x}$

$\to D_f = \mathbb{R}^*$

$\phantom{\to} R(f) = \mathbb{R}^*$

$\to$ Παρ/μη

$\to f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$ περιττή

→ $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x^2}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}<1 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow$

$|x|>1 \Leftrightarrow x>1$ ή $x<-1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-1,1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

→ $f(-1)=-2$ Τοπικό ελάχιστο

$f(1)=2$ Τοπικό μέγιστο

→ $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

$f''(x)<0$ στο $(-\infty,0)$

$f''(x)>0$ στο $(0,+\infty)$

κανένα σημείο καμπής

→ όχι ολικά ακρότατα

→ $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=0 \Rightarrow$ Στο $\pm\infty$ έχει ασύμπτωτη την

$y=x$. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

κατακόρυφες ασύμπτωτες στα $0^+$ και $0^-$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | ↗ | ↘ | ↘ | ↗ | |
| $f'$ | + | − | − | + | |
| $f''$ | − | − | + | + | |

Υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, περιττή

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, άρτια

$tgh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

$ctg\, h x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Τύποι

- $(\sinh x + \cosh x)^n = e^{nx}$
  $= \sinh(nx) + \cosh(nx)$

[$(\cos x, \sin x) \in$ Μοναδιαίο κύκλο γιατί $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$]

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
  $\Rightarrow (\sinh x, \cosh x) \in$ Υπερβολή $y^2 - x^2 = 1$

- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \sinh y \cosh x$

- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$

- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $(\cosh x)' = \sinh x$
- $(tgh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- $(ctgh x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$, $x \neq 0$

Απειροστικός Λογισμός I

17-1-19

Τύποι: (συνέχεια)

• $\sinh x$ γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$

γιατί $(\sinh x)' = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 0$

$\lim_{x \to \infty} \sinh x = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty$

Από συνέχεια και ΘΕΤ $\Rightarrow \mathbb{R}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Η $f^{-1}$ ορίζεται: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f^{-1}(y) = \mathrm{Arcsinh}\, y$

Λύνουμε την εξίσωση $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow$

$e^{2x} - 1 = 2e^x y \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x y - 1 = 0$

Αν $z = e^x$: $z^2 - 2zy - 1 = 0$

$\Delta = 4y^2 + 4$

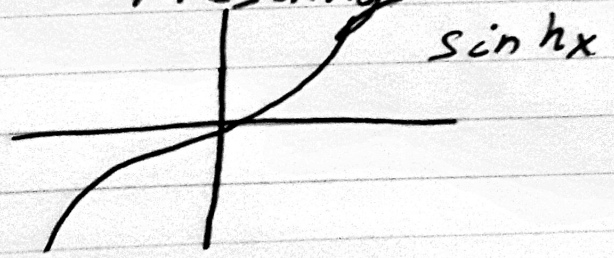
$z = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$

Επειδή $z = e^x > 0 \Rightarrow y - \sqrt{y^2+1}$ απορ.

Άρα $z = y + \sqrt{y^2+1} \Rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1} \Rightarrow$

$x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$, $y \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow \mathrm{Arcsinh}\, y$

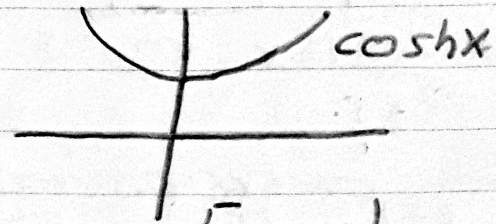


• $\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ $\qquad D(\cosh x) = \mathbb{R}$

$(\cosh x)' = \sinh x \begin{cases} <0, & x<0 \\ >0, & x>0 \end{cases}$

$\cosh x$ γν. αύξουσα στο $[0,+\infty)$
γν. φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

$R(f) = [0,\infty)$




Αντιστρέψιμη συνάρτηση $[0,\infty)$

$Arc\cosh_+ x : [1,+\infty) \to [0,+\infty]$

$\quad \|$

$(\cosh x / [0,\infty))^{-1}$

$Arc\cosh_+ x = \log(x + \sqrt{x^2-1}),\ x \in [1,\infty)$

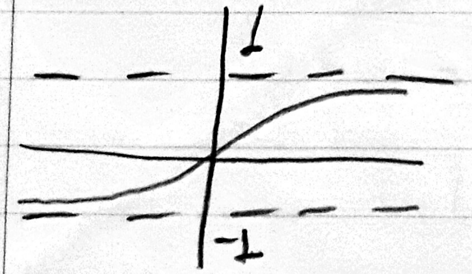
$(\cosh x / (-\infty,0])^{-1} = Arc\cosh_- x : [1,+\infty) \to (-\infty,0]$

$Arc\cosh x = \log(x - \sqrt{x^2-1}),\ x \in [1,\infty)$

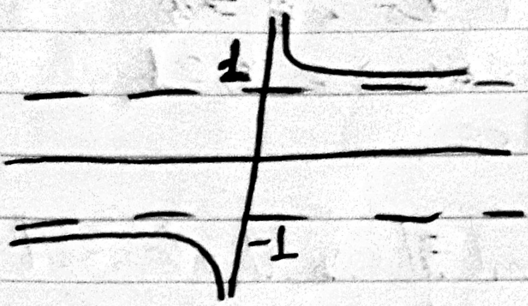
• $tgh x : (-\infty,\infty) \to (-1,1)$, $R(tgh x) = (-1,1)$

γν. αύξουσα, άρα αντιστρέψιμη

$Arc\,tgh x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x},\ |x|<1$



• $ctg\,x : (-\infty,\infty)\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ , $R(ctghx) = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ γν. φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ κ' γν. φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ , όχι όμως μονότονη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$




$Arcctgh_+ x = (ctghx|(0,+\infty))^{-1}$

$Arcctgh_- x = (ctghx|(-\infty,0))^{-1}$

$Arcctgh_+ x : (1,\infty) \to (0,\infty)$
$Arcctgh_- x : (-\infty,-1) \to (-\infty,0)$

$$\boxed{Arcctghx = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} \;,\; |x|>1}$$